Questioni di storia del Pensiero Scientifico

Il Novecento della storia della scienza

Facoltà di Filosofia - Corso 50647

M-ST0/05- Storia delle scienze e delle tecniche

Prof.ssa Flavia Marcacci – ***www.flaviamarcacci.it***

Probabilità e statistica.

Cenni storici ed elementi introduttivi di calcolo.

PARTE I

Indice

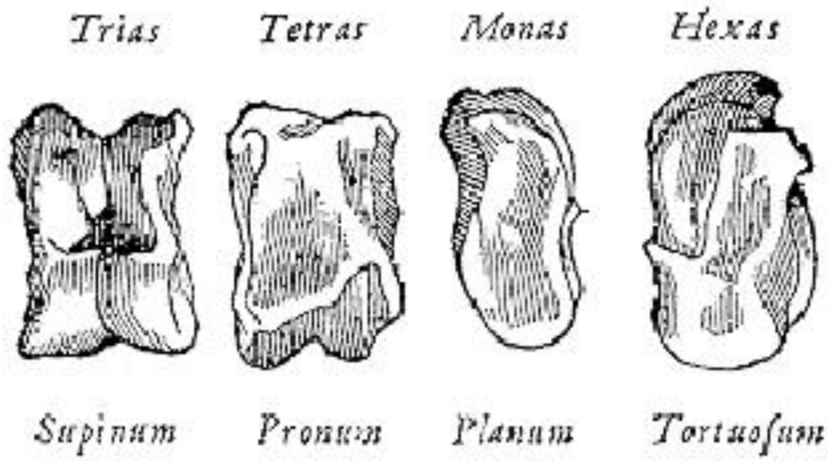
- La probabilità: quale storia?
- Strumenti per il calcolo delle probabilità: il calcolo combinatorio
- Calcolo della probabilità: definizioni
- Calcolo della probabilità: teoremi

La probabilità: quale storia?

Qualche premessa storica

La probabilità così come oggi la intendiamo nasce solo nel ‘600. Generalmente il primo oggetto a cui si associa questo tipo di calcolo è il dado. Questo gioco era conosciuto fin dall’antichità: nel Museo egizio del Cairo sono conservati oggetti simili a dadi, ma con quattro facce, che venivano ricavati da un osso particolare del tallone di alcuni animali, il *talus* (detto anche astragalo), e utilizzati per il gioco d’azzardo. Un *talus* poteva cadere su quattro delle sei facce che lo compongono, sebbene sembra che alcuni esemplari venissero lavorati in modo da dare una pari probabilità ad ognuna delle facce (Hacking 1987, 14).

I dadi propriamente intesi sono comunque risalenti ad epoche molto remote, fin da 2000 anni prima di Cristo. Pensando al mondo greco, invece, viene subito in mente Carneade e la scuola scettica.



Da http://xoomer.virgilio.it/giocolab/Caso/numeri-casuali.htm#astragali

Cf. http://www.britishmuseum.org

- Il calcolo delle probabilità viene a configurarsi nelle sue specificità solo nel XVII secolo. Perché? C'è chi ha sostenuto che il motivo è da additarsi allo sviluppo di necessità economiche che richiesero la chiarificazione di alcuni concetti probabilistici. Si dà il caso infatti che, Luca Pacioli, inventore della partita doppia (cf. *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, 1494), sollevò molte questioni di probabilità relative a problemi di carattere commerciali. Ma non formulò alcuna soluzione di carattere generale.
- Analogamente nei Paesi Bassi, dove fin dal XVI secolo si applicavano (come d'altra parte nell'Impero romano dal III secolo d.C.), si calcolavano rendite vitalizie per le quali si doveva ricorrere a nozioni di probabilità. Ma dovevano calcolarsi male, nonostante l'impegno di matematici cartesiani, se le città erano sempre in perdita! (Hacking 1987, 15)
- In altre parole la spiegazione economica sembra insufficiente. Analogamente non sembra ragionevole la spiegazione che lega la tarda nascita del calcolo delle probabilità al determinismo conosciuto dall'Europa medievale. «La cultura europea cominciò a comprendere concetti come casualità, probabilità, caso e speranza matematica *[expectation*] esattamente in quel momento della sua storia in cui le concezioni teologiche della prescienza divina erano state consolidate dall'incredibile successo dei modelli meccanicistici. Molti tipi diversi di determinismo sono apparsi in età e culture diverse» (Hacking 1987, 13).

La duplice dimensione del concetto nascente di probabilità

- Quando inizia a comparire questo concetto viene utilizzato e studiato sotto una duplice veste: aleatoria e epistemologica. La prima, connessa all'idea di casualità e studiata con i metodi numerici, era analizzata principalmente da tecnici e studiosi interessati a fenomeni di tipo stocastico e casuale (esempio 1). La probabilità nel suo aspetto epistemologico (connesso alla dimensione di *credenza*, e dunque alla valutazione del grado di ragionevolezza di proposizioni) era oggetto di trattazione di filosofi, principalmente (esempio 2). Purtroppo l'uno e l'altro ambito restavano spesso divisi e incomunicabili. Tuttora la probabilità viene trattata in maniera non integrata e secondo le diverse definizioni (cf. *infra*).

- Esempio 1: Pascal a Meré: **“Lanciando 2 dadi,si ha una sola probabilità che venga come somma 2”, disse Pascal; “invece si hanno 2 possibilità di avere 3; si hanno 3 casi in cui la somma è 4; si hanno 4 casi in cui la somma è 6; si hanno 6 casi in cui la somma è 7; si hanno 5 casi in cui la somma è 8; e poi i casi in cui la somma è 9 o 10 o 11 o 12 tornano a calare. Voi capite, Cavaliere, che tanto più è alta la possibilità di avere un numero, tanto più è facile che quel numero accada davvero. Dovrete quindi smettere di giocare dicendo 2 o 3 a caso; dovrete invece sempre chiedere ai vostri dadi che la somma sia 7. Dovrete quindi smettere di giocare dicendo 2 o 3 a caso; dovrete invece sempre chiedere ai vostri dadi che la somma sia 7. Vedrete che questo si verificherà con una certa frequenza; dei 36 casi possibili, 6 danno come somma il 7. Giocando 3 volte ogni mano, avrete quasi la certezza di vincere una mano sì e una no”.**

- Esempio 2: Pascal e la scommessa su Dio. Decidersi per Dio non è questione di casualità, ma ha a che fare con la ragionevolezza del credere. Rimanda, cioè, a una qualche teoria della decisione.

Esaminiamo allora questo punto, e diciamo: “Dio esiste o no?” Ma da qual parte inclineremo? La ragione qui non può determinare nulla: c'è di mezzo un caos infinito. All'estremità di quella distanza infinita si gioca un giuoco in cui uscirà testa o croce. Su quale delle due punterete? Secondo ragione, non potete puntare né sull'una né sull'altra; e nemmeno escludere nessuna delle due. Non accusate, dunque, di errore chi abbia scelto, perché non ne sapete un bel nulla.

“No, ma io li biasimo non già di aver compiuto quella scelta, ma di avere scelto; perché, sebbene chi sceglie croce e chi sceglie testa incorrano nello stesso errore, sono tutte e due in errore: l'unico partito giusto è di non scommettere punto”.

Sí, ma scommettere bisogna: non è una cosa che dipenda dal vostro volere, ci siete impegnato. Che cosa sceglierete, dunque? Poiché scegliere bisogna, esaminiamo quel che v'interessa meno. Avete due cose da perdere, il vero e il bene, e due cose da impegnare nel giuoco: la vostra ragione e la vostra volontà, la vostra conoscenza e la vostra beatitudine; e la vostra natura ha da fuggire due cose: l'errore e l'infelicità. La vostra ragione non patisce maggior offesa da una scelta piuttosto che dall'altra, dacché bisogna necessariamente scegliere. Ecco un punto liquidato. Ma la vostra beatitudine? Pesiamo il guadagno e la perdita, nel caso che scommettiate in favore dell'esistenza di Dio. Valutiamo questi due casi: se vincete, guadagnate tutto; se perdete, non perdete nulla. Scommettete, dunque, senza esitare, che egli esiste.

Pascal, *Pensieri*, 164

Dunque quando nasce la probabilità?

- La data usualmente utilizzata come riferimento è quella del 1654, quando Pascal risolse due problemi che Fermat gli sottoponeva rispedendoglieli. Nel 1662 nella *Logica* di Port Royal Pascal usa il termine “probabilità”, mentre contemporaneamente Leibniz usava questo concetto in ambiente legale.
- Huygens nel 1657 già scriveva un manuale sulla probabilità. Nel decennio dal ‘60 al ‘70 avanzano velocemente le tecniche di carattere statistico applicate all’ambito attuariale.
- Cosa permise il fiorire di questi studi, anche se secondo approcci diversi? Deve esserci stato un qualche spazio teoretico e filosofico comune che consentì questo processo (e che probabilmente è rimasto immutato a tutt’oggi).

Sviluppi 800eschi

- Grazie a Laplace (1749-1827) la teoria della probabilità si sgancia dall'ambito della teoria dei giochi, al quale nel secolo precedente era stata legata. Sia Laplace che i suoi predecessori, però, avevano sempre sollevato questioni collegate alla probabilità: il caso, l'ordine, la verosimiglianza, l'analogia, l'induzione, la credibilità, la veridicità, etc…
- Ad ogni modo è Laplace a insistere (e diffondere) nuovamente sull'ideale ottimistico di un'Intelligenze ordinatrice, alla quale ogni passato e futuro erano conoscibili in virtù dell'ordine conferito alla natura. In virtù di questo alla conoscenza umana era ottimisticamente conferito il potere di approssimarsi a questa Intelligenza. Strumenti fondamentali per questa approssimazione sono l'induzione e l'analogia, fondate sulla probabilità. Non solo, induzione e probabilità divengono veri e propri strumenti di scoperta.
- Il Settecento si era accorto della provvisorietà di asserti induttivi (fondamentali per la scienza), nonostante dal secolo precedente ci si interrogasse sulla stabilità degli asserti scientifici. Buffon è esplicito nel riferire che alla fisica e alla storia naturale solo il calcolo delle probabilità è utile: una matematica più compiuta è riferibile solo a scienza maggiormente "esatte", quali l'ottica e l'astronomia (Cf. Dessì 1989, 21-24).

Così la probabilità veniva ad essere una misura di quanto non può essere conosciuto. Il sostrato epistemologico di questo approccio è la percezione della differenza ontologico tra enti necessari e enti contingenti.

- Per Laplace, invece, induzione e probabilità sono capaci di fondare conoscenze garantite*. Questa garanzia proviene da un assunto certo: che ogni fatto ha una causa. Il rapporto causa-effetto elimina ogni indeterminatezza. La certezza, così, diviene semplicemente il limite della probabilità quando il rapporto fra casi favorevoli e casi possibili è 1. Di fatto la differenza tra certezza e probabilità per Laplace è solo di tipo psicologico (cf. Dessì 1989, 27-30 e ss).
- Questo concetto di probabilità come strumento matematico adatto all'indagine di fenomeni empirici di qualsiasi tipo (dall'ambito morale ad altri ambiti) fu particolarmente apprezzato entro un quadro di tipo deterministico. È con questo approccio che la storia della scienza tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento proverà a confrontarsi con tanti nuovi stimoli, che porteranno di fatto alla Seconda Rivoluzione Scientifica.

> Se si tiene conto di tutti i risultati dell'osservazione e dell'esperienza, si possono estendere queste applicazioni perfezionando così l'economia politica... Trattiamo l'economia come si è trattata la fisica attraverso la strada dell'esperienza e dell'analisi. (Laplace)

* La stessa confusione tra livelli di trattazione del concetto di probabilità si può rintracciare anche in riferimento al concetto di induzione. Cf. le mie dispense *Il problema dell'induzione*

Strumenti per il calcolo della probabilità: il calcolo combinatorio

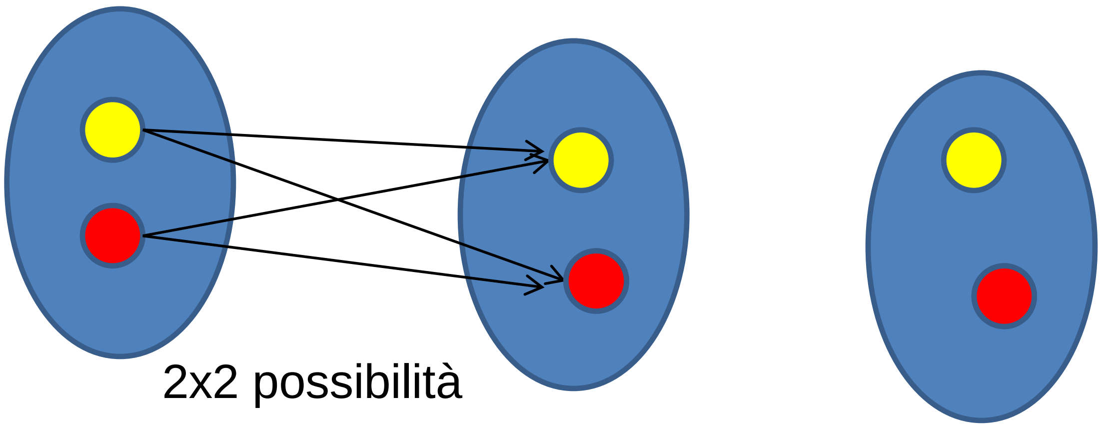
Strumenti utili al calcolo delle probabilità (calcolo combinatorio)

Il calcolo combinatorio studia sistematicamente come determinare il numero di elementi di un insieme dato. È assai utile il **principio di moltiplicazione** :

Se un insieme contiene m elementi e un secondo n elementi, le possibili scelte eseguite prendendo un qualunque elemento del primo insieme e un qualunque elemento del secondo sono mn.

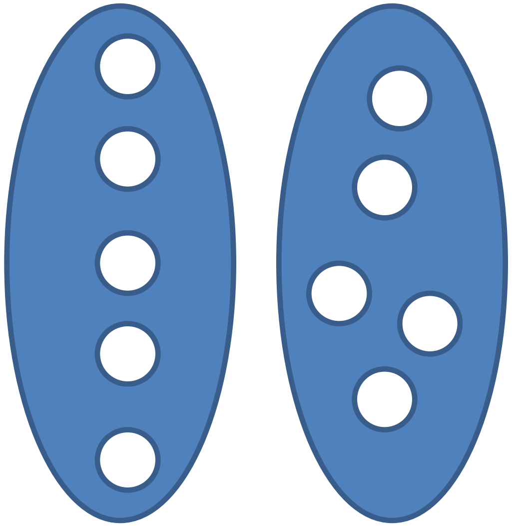
Esempi

Quante combinazioni possibili lanciando una moneta 3 volte? 2 possibilità ogni insieme, quindi $2x2x2=2^3=8$ (cioè testa-testa-testa, croce-croce-croce, testa-testa-croce,etc….



2x2 possibilità

(2x2)x2 possibilità



5 x 5 = 25
eventualità

In una classe 5 alunni devono essere interrogati a matematica e a italiano (quindi ogni studente o viene interrogato ad una sola materia o viene interrogato ad entrambe).

Quante eventualità possono darsi?

Disposizioni, permutazioni, combinazioni

- Il calcolo combinatorio cerca di studiare sistematicamente come applicare il principio di moltiplicazione. In questo senso il calcolo combinatorio propone regole per agevolare l’uso di tale principio e rendere le operazioni più veloce. Occorre però comprendere bene i problemi che si vanno a porre.

Disposizioni

- **Disposizioni con ripetizione di n elementi a k a k:** dati n elementi, si studiano tutte i possibili raggruppamenti. I raggruppamenti sono considerati diversi sia se sono diversi gli elementi che li costituiscono sia se è diverso l'ordine. $\mathbf{D'_{n,k} = n^k}$
- **Esempio.** Siano gli n elementi a, b, c, d. si vogliono studiare i possibili raggruppamenti da 3: abc;abd;aab;bcd;bcc;… D = 4^3= 64

n scelte	n scelte	n scelte	….	n scelte
1° posto	2° posto	3° posto		k° posto

- **Disposizioni semplici (senza ripetizioni):** i raggruppamenti stavolta sono considerati sia se differiscono per almeno un elemento (es. abc è diverso da abd) sia se, formati dagli stessi elementi, differiscono per l'ordine (abc è diverso da bca). Deve anche valere k <= n.
  $\mathbf{D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$

n scelte	n-1 scelte	n-2 scelte	....	n-(k-1) scelte
1° posto	2° posto	3° posto		k° posto

Permutazioni

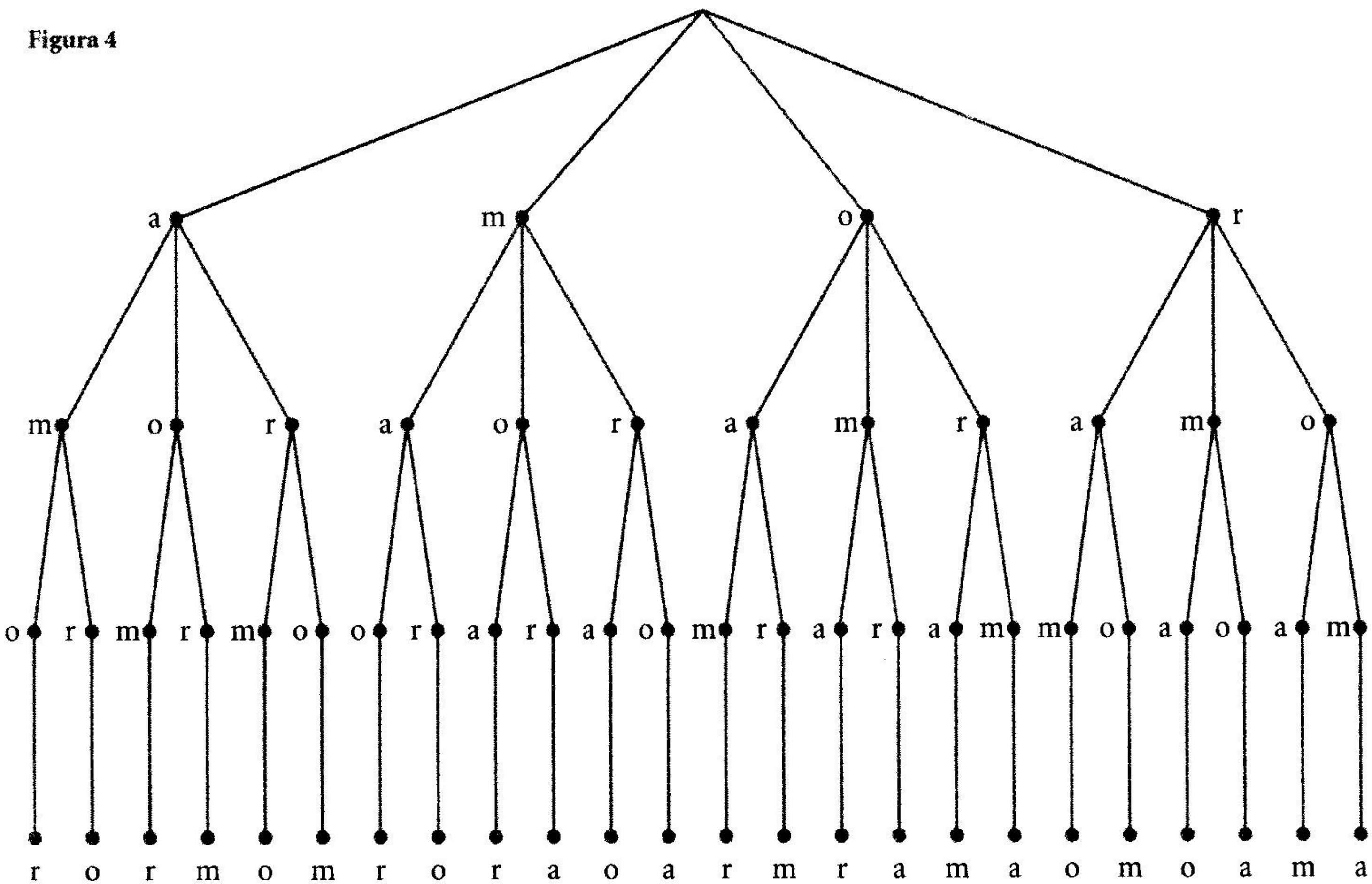
- Sono disposizioni semplici nel caso particolare in cui n=k. **P=n!**
- Nelle permutazioni ogni raggruppamento contiene tutti gli n elementi mentre in ogni raggruppamento cambia l’ordine.
- Cf. esercizi Palladino-Scotto-Frizione, p. 104

Esempio con gli elementi a,b,c

- Disposizione con k=2 con ripetizioni: aa; ab;ac; ba;bb;bc;ca;cb;cc, ovvero 3^2
- Disposizione semplice con k=2: ab;ac;ba;bc;ca;cb, ovvero 3x2=6
- Permutazione: abc;acb;bac;bca;cab;cba, ovvero 3!=6

Esempio a grafo: anagramma di ramo

Figura 4



Palladino-Scotto-Frizione 2000, 99

Percorrendo tutti i possibili rami, leggiamo:

amor	amro	aomr	aorm	armo	arom	maor	maro
moar	mora	mrao	mroa	oamr	oarm	omar	omra
oram	orma	ramo	raom	rmao	rmoa	roam	roma

Combinazioni

- Il calcolo combinatorio si fa più complesso quando nei raggruppamenti **l’ordine non conta più** (ad esempio abc diventa uguale a bca). A quel punto non basta il principio di moltiplicazione. Un esempio di questo genere è il problema: dato un insieme di 15 elementi, quanti sono i possibili sottoinsiemi da 6 elementi?
- **Combinazioni semplici di n elementi a k a k, con k<=n,** tutti i possibili raggruppamenti senza ripetizioni di questi n elementi a k alla volta, considerando due raggruppamenti distinti solo se differiscono per almeno un elemento; non conta, invece, l’ordine.

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ad esempio, le combinazioni semplici dei quattro elementi a, b, c, d a tre a tre sono:

$$abc \qquad abd \qquad acd \qquad bcd$$

ossia 4 in tutto. Ciò suggerisce un metodo diverso dal diagramma ad albero per scrivere tutte le disposizioni semplici di quattro elementi a, b, c, d a tre a tre, senza dimenticarne o ripeterne qualcuna. Si parte dalle combinazioni e, permutando ciascuna di esse in tutti i modi possibili, si ottengono tutte le possibili disposizioni (tabella 1).

Combinazioni	Disposizioni					
abc	*abc*	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
abd	*abd*	*adb*	*bad*	*bda*	*dab*	*dba*
acd	*acd*	*adc*	*cad*	*cda*	*dac*	*dca*
bcd	*bcd*	*bdc*	*cbd*	*cdb*	*dbc*	*dcb*

Si hanno così tutte le 24 disposizioni. Vale pertanto la relazione $C_{4,3} \cdot P_3 = D_{4,3}$.
In generale, indicando con $C_{n,k}$ il numero delle combinazioni semplici di n elementi a k a k, dato che, per ciascuna combinazione, si ottengono P_k disposizioni, per il principio di moltiplicazione abbiamo:

$$C_{n,k} \cdot P_k = D_{n,k}$$

da cui:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

Ricordando le formule per il calcolo delle disposizioni e delle permutazioni si ha:

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}$$

Palladino-Scotto-Frizione 2000, 105

Esempi

- In quanti modi in una classe di 16 alunni se ne possono scegliere 7 da mandare dal preside?

  Si tratta di una combinazione: dei 16 alunni dobbiamo prendere 7 volta, e ovviamente in nessun raggruppamento potrò ripetere uno studente ed in ogni raggruppamento non conterà l'ordine con cui un singolo studente è preso.

$$C_{16,7} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 10}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11440$$

Esercizi p. 106

Calcolo combinatorio e probabilità

- **Un'urna contiene 6 palline rosse e quattro verdi. Si estraggono 5 palline, <u>senza rimettere la pallina estratta nell'urna</u>. Qual è la probabilità che escano 3 palline rosse e 2 verdi?**

  Combinazioni delle 10 palline estratte 5 a 5: $C_{10,5}$= 252

  Casi favorevoli alla terna di palline rosse: $C_{6,3}$=20

  Casi favorevoli alla coppia di palline verdi: $C_{4,2}$=6

  Quindi perché escano 3 rosse e 2 verdi per il principio di moltiplicazione vale 20x6=120 casi favorevoli

  Dunque la probabilità è 120/252= 0,48 (48%) circa.

Esempio: la famiglia con quattro figli

- Se in una famiglia ci sono 4 figli, quante probabilità ci sono che sono 2 maschi e due femmine?
- Verrebbe da pensare che è “più probabile” avere proprio 2 maschi e 2 femmine. Poiché per ogni figlio è facile sapere che al 50% può essere maschio o al 50% femmina. È proprio così?
- Costruiamo un prospetto di possibilità.

Figlio 1	Figlio 2	Figlio 3	Figlio 4
M	M	M	M
M	M	M	F
M	M	F	M
M	M	F	F
M	F	M	M
M	F	M	F
M	F	F	M
M	F	F	F
F	M	M	M
F	M	M	F
F	M	F	M
F	M	F	F
F	F	M	M
F	F	M	F
F	F	F	M
F	F	F	F

- Possono verificarsi 16 situazioni diverse. Infatti per ogni figlio ci sono 2 possibilità, su un totale di 4 figli. Dunque bisogna impostare una disposizione con ripetizione, dove gli elementi k sono 4 mentre il numero n di scelte possibili sono 2. Quindi $2^4=16$.
- Solo in due casi i figli sono dello stesso sesso: 2/16, cioè 1/8.
- Evidenziamo in giallo il caso 2 maschi – 2 femmine e in rosso il caso 3-1 (ovvero 3 di un sesso e 1 di un altro).
  CASO GIALLO: 6/16, cioè 3/8
  CASO ROSSO: 8/16, cioè 4/8
- **Il caso più probabile è, dunque, quello con 3 figli dello stesso sesso e uno di sesso diverso.**

Figlio 1	Figlio 2	Figlio 3	Figlio 4
M	M	M	M
M	M	M	F
M	M	F	M
M	M	F	F
M	F	M	M
M	F	M	F
M	F	F	M
M	F	F	F
F	M	M	M
F	M	M	F
F	M	F	M
F	M	F	F
F	F	M	M
F	F	M	F
F	F	F	M
F	F	F	F

Calcolo della probabilità: definizioni

Probabilità. Definizione classica.

La probabilità di un evento E è il rapporto del numero dei casi favorevoli all'evento al numero dei casi possibili, **purché tutti i casi considerati siano egualmente possibili**.

(P. S. Laplace, *Thèorie analytique des probabilités*, Paris 1812)

- Critiche:
  - c'è un circolo vizioso tra "egualmente possibili" e "di eguale probabilità"
  - Non esiste definizione soddisfacente di probabilità (Poincarè)
  - L'eguale probabilità non si può che postulare, e poi semmai commisurare con la realtà (Castelnuovo)
  - Base soggettiva della nozione di probabilità (De Finetti)
- Consensi, a patto di un chiarimento della nozione di "eguale possibilità"

Altre definizioni

- Definizione frequentista
- Definizione soggettiva
- Definizione assiomatica

Per tutte vale il concetto di

Evento enunciati il cui valore (V o F) non è immediatamente definibile e dipende dal caso

Come le proposizioni, gli eventi sono fra loro componibili (eventi composti) ricorrendo a connettivi logici (*e*, *o*, *non*). La composizione gode delle proprietà commutativa, associativa, idempotenza.

Eventi incompatibili il verificarsi dell’uno esclude il verificarsi dell’altro

Eventi indipendenti il verificarsi di uno dei due non influenza il verificarsi dell’altro

Eventi - esempi

- Eventi incompatibili: Uscita di testa nel lancio di una moneta/Uscita di croce nel lancio di una moneta
- Eventi compatibili: Uscita del 2 nel lancio di un dado/uscita di un numero pari nel lancio di un dado
- Eventi indipendenti: Uscita di un numero rosso nella roulette/Uscita di un numero nero nella roulette

Definizione classica (a priori)

- La misura della probabilità dell'evento considerato è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli m e quello dei casi possibili n, a condizione che tutti i casi abbiano la stessa possibilità di realizzarsi.

  $p = m/n$,

  $0<p<1$ (evento aleatorio o casuale)

  $p=0$ (evento impossibile)

  $p=1$ (evento certo)

- Possibilità di una rappresentazione insiemistica.

Esempi

- Probabilità che nel lancio di un dado esca un numero pari.

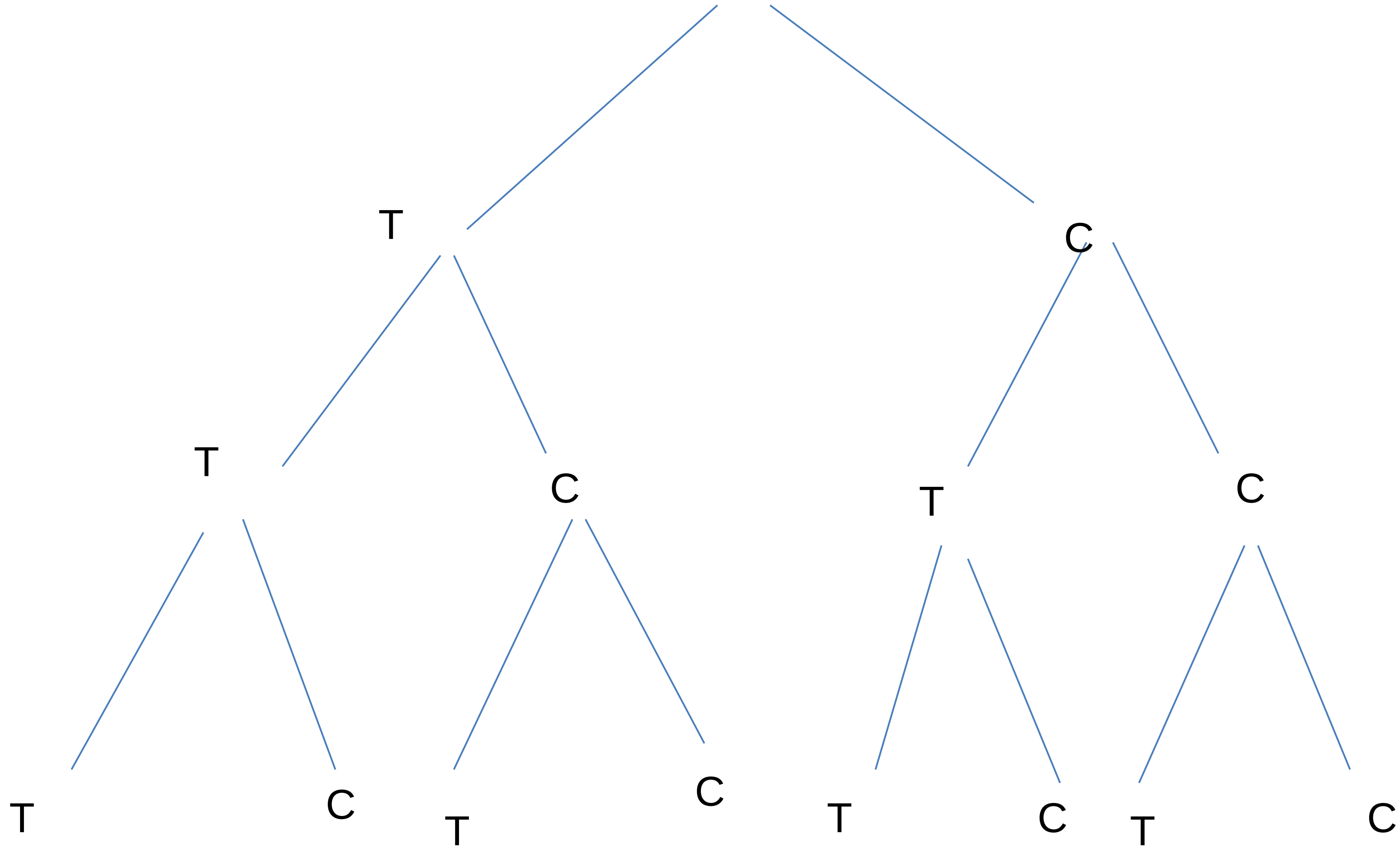
3 casi favorevoli sui 6 totali: p =3/6=1/2

- Ci sono due lotterie e voglio vincere il primo premio. Compro 162 biglietti per la prima, su un totale i 484 biglietti; e altri 176 per la seconda, su un totale di 484 biglietti. Su quale ho maggiori possibilità di vittoria?

Prima lotteria: 162/484= 0,3347 circa; 176/521= 0,3378 circa. Di poco, ma ho più possibilità nella seconda lotteria.

Calcolo combinatorio e probabilità classica

- Quale è la probabilità che lanciando tre volte una moneta escano due volte croce, senza badare all’ordine? Avevamo già calcolato il numero di possibilità di lanci applicando semplicemente il principio di moltiplicazione: si danno 8 possibili incroci. Su questi i casi in cui può uscire due volte croce sono 3: CCT, CTC,TCC. Le probabilità saranno dunque 3/8=0,375.



TTT,TTC,TCT, TCC,CTT,CTC,CCT,CCC

Se avessimo lanciato la moneta mille volte l’intuito ci avrebbe spinto a credere che uscirà un numero di croci intorno a 500. Perché?

La sequenza con tutte croci è una sola. La sequenza con un numero elevato di croci (o di teste) sarà più frequente.

È utile a questo punto introdurre un’altra definizione di probabilità, capace di confrontare la probabilità teorica con l’esperimento.

Definizione frequentista (a posteriori)

- La frequenza è una quantità calcolata a posteriori dopo aver effettuato un esperimento. Si parla di *frequenza relativa* indicando il rapporto tra il numero m in cui si presenta un certo evento (che è invece la *frequenza assoluta*) e il numero n delle prove fatte.

  $f = m/n$,

  $0<f<1$ (evento aleatorio o casuale)

  $f=0$ (evento mai verificato)

  $p=1$ (evento sempre verificato)

- Possibilità di una rappresentazione insiemistica.
- Problemi: vale solo per eventi altamente ripetibili

Legge empirica del caso o legge dei grandi numeri

- **La frequenza di un evento, calcolata effettuando un gran numero di prove, può essere considerata come il valore approssimato della probabilità**
- Valore di probabilità = valore approssimato della frequenza
- Osservando la frequenza si desume una maggiore o minore probabilità degli eventi

La probabilità di un evento è il limite a cui tende la frequenza relativa, al tendere all'infinito del numero delle prove effettuate.

Esempio

Come calcolare il premio di assicurazione sulla vita nel caso di persone giovani? Si dia una persona che chiede la stipula assicurativa un giovane 25enne. Chiede un assicurazione di 350.000 euro nel caso muoia entro 25 anni. Il premio sarà calcolato in base alla probabilità che un giovane muoia entro i 50 anni. Per fare questa stima si ricorre a rilevazioni sperimentali. Si ponga che negli ultimi 30 anni su 10000 25enni l'evento "muore entro i 50 anni" si è verificato in 400 casi. La probabilità dell'evento sarà allora 400/10000=0,04. Il premio sarà allora di 350.000x0,04= 14.000 euro, che il giovane dovrà versare subito all'assicurazione.

Definizione soggettiva

- Si riferisce ad **eventi aleatori non ripetibili** (es. scommesse) per i quali si usano conoscenze pregresse possedute dal soggetto. La valutazione deve però seguire un *principio di coerenza*.
- Fiducia del verificarsi di un evento che ha un individuo coerente. Se s è il capitale investito e S il capitale ricavato, con $s<S$, per coerenza deve aversi: **$p = s/S$,**

  $0<p<1$ (evento aleatorio o casuale)

  $p=0$ (evento impossibile in base alle proprie informazioni e opinioni)

  $p=1$ (evento considerato certo)

  Dove p è adimensionale
- **La probabilità di un evento, secondo un individuo coerente, è la somma che egli considera equo sborsare per avere la possibilità di incassare un importo unitario al verificarsi dell'evento considerato**

- Una definizione più semplice si lega al concetto di speranza matematica.

Se una somma S è esigibile con probabilità p, si dice speranza matematica il prodotto Sp.

Definizione assiomatica/ spazio degli eventi

- **Spazio degli eventi** insieme avente come elementi tutti i possibili sottoinsiemi dell'universo *U (*costituito dagli eventi elementari), inclusi l'insieme vuoto e *U* stesso

Evento E ↔ insieme avente tutti gli esiti favorevoli al realizzarsi di E
Insieme universo *u* = insieme costituito da tutti i possibili esiti dell'esperimento

Esempio: lancio del dado
U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Insieme delle parti *P(U)* = {E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, …}, con E_1 ={1}, …, E_7 = {1,2},…

Definizione assiomatica/ assiomi

- Funzione p(E): associa ad ogni elemento E_i dello spazio degli eventi un ben determinato numero reale $p(E_i)$ tale che $p(E_i) \in [0,1]$. Con la seguente assiomatizzazione la funzione è utilizzabile come calcolo delle probabilità
- **Assioma 1**ad ogni elemento E dello spazio degli eventi è associabile un numero reale p(E) non negativo detto probabilità di E
- **Assioma 2** dati 3 elementi tali che $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3)$ p(E) si dice funzione additiva d'insieme
- **Assioma 3** se S è lo spazio degli eventi $p(S) = 1$

Calcolo della probabilità: teoremi

TEOREMI

- Teorema della probabilità contraria: **la somma delle probabilità dio un evento E e del suo contrario nonE è uguale a 1**
- Teorema della probabilità totale: **dati almeno due eventi incompatibili E1, E2, E3… la probabilità dell'evento unione è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi**: $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3)$. Se gli eventi non sono compatibili la probabilità dell'evento unione è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi diminuita della probabilità dell'evento intersezione:
  $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_1 \cap E_2)$

Probabilità condizionata: è la probabilità di un evento E_1, subordinato al realizzarsi di un evento E_2, data dal rapporto tra la probabilità che E_1 e E_2 si realizzino contemporaneamente e la probabilità del realizzarsi di E_2.

- Teorema della probabilità composta:
  - Eventi dipendenti: la probabilità dell'evento $E_1 \cap E_2$ è uguale al prodotto della probabilità dell'evento E_1 per la probabilità dell'evento E_2 subordinato all'evento E_1 (evento E_2/E_1)
  - Eventi indipendenti: : la probabilità dell'evento $E_1 \cap E_2$ è uguale al prodotto della probabilità dell'evento E_1 per la probabilità dell'evento E_2

La formula di Bayes

- Esprime la relazione tra eventi come una relazione di causa-effetto. In altre parole la formula esprime la probabilità che al verificarsi di un certo evento E la causa sia proprio l'evento C:

$$p(C/E) = \frac{p(C)\,p(E/C)}{p(E)}$$

- Questo vale nel caso che ci sia una sola causa. Laddove ci siano più cause sospettate la formula diventa:

$$p(C_i/E) = \frac{p(C_i)\,p(E/C_i)}{\sum_{1}^{n} p(C_i)\,p(E/C_i)}$$

ESEMPIO

Un negozio è fornito di lampadine da due ditte A e B
Un cliente entra e chiede una lampadina ed il commesso, scegliendo a caso da una delle due scatole dove tiene le lampadine, gliene dà una della ditta A.
Sapendo che nella Scatola 1 ci sono 30 lampadine della ditta A e 15 della ditta B e che nella Scatola 2 ci sono 20 lampadine della ditta A e 30 della ditta B, calcolare la probabilità che la lampadina venduta provenga dalla Scatola 1.
Le scatole sono le cause che possono dare luogo all'evento «lampadina di A».
Sia C_1 la causa Scatola 1, C_2 la causa Scatola 2 ed E l'evento lampada della ditta A.
Supposto che le due scatole abbiano uguale possibilità di essere scelte si ha:

$$p(C_1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad p(C_2) = \frac{1}{2}.$$

La probabilità che una lampadina della ditta A venga estratta dalla scatola 1 è

$$p(E/C_1) = \frac{30}{45} = \frac{2}{3},$$

mentre la probabilità che venga estratta dalla scatola 2 è

$$p(E/C_2) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

Per cui, applicando la formula di Bayes, si ha

$$p(C_1/E) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{5}{8}.$$

Si vede così che la probabilità richiesta è $\frac{5}{8}$.
Volendo calcolare $p(C_2/E)$, anziché far ricorso alla formula, si può applicare il teorema della probabilità contraria per cui si ha

$$p(C_2/E) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

Dodero-Baroncini-Manfredi 1991, 791

- Un tipo simile di probabilità può dirsi “probabilità induttiva”. Molte situazioni con le quali lo scienziato ha a che fare non sono riconducibili né alla definizione classica né a quella frequentista di probabilità. Su parametri diversi vengono svolti molti ragionamenti che guidano la ricerca. È il caso di situazioni in cui una serie di evidenze portano a credere molto probabile l’esistenza di alcuni oggetti: ad esempio, l’esistenza del bosone di Higgs (v. LHC).

La costruzione delle variabili

- **Una variabile casuale X è una quantità variabile i cui valori sono determinati dai possibili risultati aleatori di un esperimento, reale o concettuale.** Dato un qualunque esperimento il suo insieme universo U è l'insieme di tutti i possibili esiti dell'esperimento. Siano E_i gli eventi aleatori di U che ne costituiscono una partizione (dunque a 2 a 2 disgiunti e tali che la somma copre tutto U) e tali che ad ognuno di essi si può associare un valore di probabilità p_i.
- **Distribuzione di probabilità:** insieme dei valori di p_i.
- **Variabile casuale X:** quantità variabile i cui valori sono determinati dai possibili risultati aleatori di un esperimento (cioè da una partizione di U). Può essere continua o discreta.
- $\boldsymbol{\Sigma p_i=1}$

Le variabili casuali continue e la distribuzione di Gauss (o normale)

- È una variabile casuale che può assumere tutti i valori compresi in un dato intervallo.
- La distribuzione gaussiana o normale è continua e viene utilizzata in moltissime situazioni.